جامعة البعث	امتحانات الدورة الفصلية الثانية ٢٠١٤-٢٠١٥	المدة : ساعة و نصف
كلية العلوم	سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)	العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات	لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي	

جواب السؤال الأول (٢٠ درجة):

أ)- كي يكون الفضاء (s,d) خطيا علينا بيان أن المسافة لا متغيرة الانسحاب لأن

$$|x_k - y_k| = |x_k + z_k - y_k - z_k| = |x_k + z_k - (y_k + z_k)|$$

سنثبت أن (s,d) فضاء متري خطي :

حتى يكون (s,d) فضاءً مترياً خطياً يجب أن تكون d مع العملية الجمعية وعملية الجداء بعدد مستمرتين في (s,d).

شرط استمرارية الخاصة الجمعية : ليكن $x,y,a,b \in S$ سنثبت أن $d(x+y,a+b) < \varepsilon$ علماً أن $d(x,a)+d(y,b)<\delta$ لذلك سنثبت أن $d(x+y,a+b) \le d(x,a)+d(y,b)$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k + y_k - (a+b)|}{1+|x_k + y_k - (a+b)|} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(\frac{|x_k - a|}{1+|x_k - a|} + \frac{|y_k - b|}{1+|y_k - b|}\right)$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - a|}{1+|x_k - a|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|y_k - b|}{1+|y_k - b|}$$

$$\le d(x,a) + d(y,b)$$

وبذلك نحصل على استمرار الخاصة الجمعية .

شرط استمرار الجداء بعدد : لتكن $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0$ و $d(x_n,a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ سنثبت أن :

$$d(\lambda_n x_n, \lambda_0 a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

بفرض أن : $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0$ و $d(x_n,a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. من الواضح بسهولة أن :

$$d(x_n,a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow d\left(x_n^{(k)}, a^k\right) < \varepsilon$$

من أجل k عدد طبيعي من N: $d(\lambda_n x_n, \lambda_0 a) < \varepsilon$ ، لنأخذ المتتالية :

$$\left.\begin{array}{l} x_n^1 \to a^1 \\ x_n^2 \to a^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n^k \to a^k \\ \vdots \quad \vdots \\ x_n \to a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x_n^{(k)} \to a^{(k)} \\ \lambda_n x_n^{(k)} \to \lambda_0 a^{(k)} \\ \Updownarrow \\ \lambda_n x_n \to \lambda_0 a \end{array}$$

16

يدعى هذا النوع من التقارب بـ التقارب بالإحداثي .

وبالتالي فإنّ $d(\lambda_n x_n, \lambda_0 a)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ومنه استمرارية خاصّة الضرب بعدد وبالتالي الفضاء المتري (S,d) خطّي .

فضاء خطي منظم ام لا :

من أجل العدد λ والعنصر $\xi = \{\xi_n\}$ من s يكون لدينا:

$$\|\lambda\xi\|_s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\lambda\xi_n|}{1+|\lambda||\xi_n|} \neq |\lambda|.\|\xi\|_s$$

إذن أحد شروط النظيم غير محقق وبالتالي (s,d) ليس فضاءً منظماً. رغم أنه خطيا فلا يمكن أن يكون باناخياً .

ب)- تعريف المنظّم الكلّي :

لنأخذ الفضاء المتري الخطي (X,d) ولنعرف التابع $g(x)$: $g(x) = d(x,\theta)$

حيث θ صفر الفضاء X.

عندئذٍ فإن g يحقق الشروط الآتية :

1) $g: X \to \mathbb{R}$

2) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

3) $g(x) = g(-x)\ ;\ \forall x \in X$

4) $g(x+y) \le g(x) + g(y)$

5) إذا كانت $\lambda_0, \lambda_n \in \mathbb{C}$ و $a, x_n \in X$ بحيث إن :

$\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0 \wedge x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ عندئذٍ يكون $g(x_n - a)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

وإذا كانت $\lambda_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_0 a$ يكون $g(\lambda_n x_n - \lambda_0 a)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

حساب المسافة في $BV[0,1]$: تعطى بالشكل(للدالتين $f(x) = x^2,\ g(x) = -1$ حيث $x \in [0,1]$)

$d(f,g) = |f(a) - g(a)| + \overset{1}{\underset{0}{V}}(f-g)$ حيث $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f-g)$ هو التغير الكلي لفرق الدالتين:

$$d(f,g) = |0+1| + (2-1) = 1+1 = 2$$

ت)- إيجاد الكرة المفتوحة $S(p,r)$: لدينا الفضاء المتري $(\mathbb{R}^2, \rho)$ حيث ρ معرف كالآتي :

$$\rho(p,q) = |x - x_0| + |y - y_0| \qquad ; p(x_0,y_0), q(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

١) الكرة المفتوحة $S(p,r)$: $S(p,r) = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(p,q) < r\} =$

$$= \{|x - x_0| + |y - y_0| < r \qquad ; (x_0,y_0),(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

لإيجاد $s((0,0), r=1)$: $s((0,0),1) = \{|x| + |y| < 1 \quad ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ ولنناقش الحالات التالية: عندما $0 \le |y|$ & $|x| \ge 0$ فإن $|x| + |y| = x + y$ وتكون :

$s((0,0),1) = \{x + y < 1 \quad ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ وهي تمثل كل النقاط (x,y) في المستوي المحدد بالمستقيمين $x = 0$ & $y = 0$ بحيث $x + y < 1$ بالمتابعة بنفس الطريقة نحصل على ثلاث أخرى وعندها الشكل التالي يوضح أن المجموعة $s((0,0),1)$ هي مجموعة كل النقاط التي تقع داخل المربع الذي مركزه نقطة الأصل وطول

ضلعه $\sqrt{2}$ وقطراه منطبقان على المحاور الأحداثية
كما بالشكل :

جواب السؤال الثاني (١٨ درجة) :

١)- لنبين أن كل كرة مغلقة في فضاء خطي منظم $(X,\|*\|)$ تكون مجموعة محدبة .

لتكن $S[x_0,r]$ كرة مغلقة مركزها x_0 ونصف قطرها r في الفضاء الخطي المنظم X ولنثبت أن القطعة المستقيمة $z=(1-\alpha)x+\alpha y \quad ; \; 0\le\alpha\le 1$ بين النقطتين x و y من $S[x_0,r]$ تقع داخل هذه الكرة.

بما أن x و y من الكرة $S[x_0,r]$ نجد أن $\|x-x_0\|\le r \;\;,\;\; \|y-y_0\|\le r$ وأن :

$$\|z-x_0\|=\|(1-\alpha)x+\alpha y-x_0\|=\|(1-\alpha)x+\alpha y-(1-\alpha)x_0-\alpha x_0\|\le$$

$$\|(1-\alpha)(x-x_0)\|+\|\alpha(y-y_0)\|\le(1-\alpha)r+\alpha r$$

وهكذا نرى أن $\|z-x_0\|\le r$ مما يعني أن $z\in S[x_0,r]$ أي المجموعة محدبة .

٢)- هذين الفضاءين هما $AC_0[a,b]$ و $L_1[a,b]$ ولنثبت ذلك . لنضع :

$$\Phi: AC_0[a,b]\longrightarrow L_1[a,b]$$
$$f\mapsto\Phi(f)=\varphi$$

من أجل أي عنصرين f و g من $AC_0[a,b]$ يوجد عنصران مناسبان φ و Ψ من $L_1[a,b]$ بحيث يكون:

$$f(x)=\int_a^x\varphi(t)dt \quad ; \quad g(x)=\int_a^x\psi(t)dt$$

ومن أجل أي عددين λ و μ نجد: $\Phi(\lambda f+\mu g)=\lambda\varphi+\mu\psi=\lambda\Phi(f)+\mu\Phi(g)$

إذن Φ تطبيق خطي كما أن : $f\in AC_0[a,b]$; $\|\Phi(f)\|_{L_1}=\|\varphi\|_{L_1}=\int_a^b|\varphi(t)|dt=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\|f\|_{BV}$

إذن Φ يحافظ على النظيم وبالتالي متباين أيضاً (انظر (٣-٨) الملاحظة (١٠)).

ويكون Φ غامراً أيضاً لأنه من أجل أي عنصر $h(x)$ من $L_1[a,b]$ يكفي أخذ التابع المستمر مطلقاً $F(x)$:

$$F(x)=\int_a^x h(t)dt \quad ; \; x\in[a,b]$$

فيكون $\overset{b}{\underset{a}{V}}(F)=\int_a^b|h(t)|dt$ كما أن $\Phi(F)=h$.

إذن Φ إيزومورفيزم من $AC_0[a,b]$ على $L_1[a,b]$ وبالتالي هذان الفضاءان إيزومورفيان لبعضهما.

جواب السؤال الثالث (٨+١٢=٢٠ درجة):

حسب الفرض $A=\{\{x_n\}\in\ell_2: \; x_{2n}=0 \quad ,\forall n\in N\}$ ولنوجد $A^{\perp}$.

بفرض $S=\{\{x_n\}\in\ell_2 \;\; : \;\; x_{2n-1}=0 \; , \; \forall n\in N\}$ إذا كان $x\in S \;\; \& \;\; y\in A$ عندئذٍ

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\bar{y}_n=0$$

وبالتالي $x\in A^{\perp}$ هذا يؤدي أن $S\subset A^{\perp}$. وبالعكس بفرض $x\in A^{\perp}$, $x_{2m-1}\neq 0$ من أجل $m\in N$.
الشعاع $\tilde{e}_{2m-1}$ عنصر من قاعدة متعامدة في ℓ_2 إن $e_{2m-1}\in A$ أي أن $0=\langle x,\tilde{e}_{2m-1}\rangle=x_{2m-1}$ وهذا يتناقض مع أن $x_{2m-1}\neq 0$ وذلك من أجل كل $m\in N$ أي أن $x\in S$ وبالتالي $A^{\perp}\subset S$ وبذلك يتم المطلوب .

ب) (I) ⇐ (2): بما أن الجملة $h_1, h_2, \ldots\ldots$ تامة فإن مساواة بارسيفال محققة وبالتالي فإن المتتالية $\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k\right\}$ ستكون متقاربة من x وبالتالي :، $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k$

(2) ⇐ (3): نفترض أن $\langle x, h_k\rangle = 0$ مهما يكن $k = 1,2,3\ldots\ldots$ فيكون : $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k = \lim \theta = 0$

(3) ⇐ (I): نفرض جدلاً أن الجملة $h_1, h_2, \ldots\ldots$ غير تامة، عندئذٍ يوجد عنصر واحد على الأقل y من H لا تتحقق من أجله مساواة بارسيفال ، أي: $\|y\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \quad ; \quad \alpha_k = \langle y, h_k\rangle$

وبما أن المتتالية $\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k\right\}$ متتالية كوشي في H لهذا فإنه يوجد عنصر z من H بحيث : $z = \lim \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k$ لذلك فإن مساواة بارسيفال محققة أي أن : $\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \quad ; \quad \alpha_k = \langle z, h_k\rangle$

من أجل $k = 1,2,3\ldots\ldots$ يكون : $\langle y - z, h_k\rangle = \langle y, h_k\rangle - \langle z, h_k\rangle = \alpha_k - \alpha_k = 0$

وهذا يعني أن $y - z = \theta$ وبالتالي فإن $y = z$.

من ناحية ثانية لدينا: $\|y\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|z\|^2$

أي أن: $\|y\| > \|z\|$ وهذا غير صحيح طالما $y = z$ إذن الفرض الجدلي خاطئ والجملة $h_1, h_2, \ldots$ تامة في H

__جواب السؤال الرابع (١٥ درجة):__

لنأخذ العنصرين $x_1 = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ و $x_2 = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$ من الفضاء ℓ_2 عندئذ :

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = A(\alpha\xi_1 + \beta\zeta_1, \alpha\xi_2 + \beta\zeta_2, \ldots) = \left(\frac{\alpha\xi_1 + \beta\zeta_1}{1}, \frac{\alpha\xi_2 + \beta\zeta_2}{2}, \ldots\right) =$$

$$\alpha\left(\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \ldots\right) + \beta\left(\frac{\zeta_1}{1}, \frac{\zeta_2}{2}, \ldots\right) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$$

إذن A خطي . ولنبرهن أنه محدود .

$$\|A(x)\|_{\ell_2} = \left\|\left(\frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \ldots\right)\right\|_{\ell_2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{\xi_i}{i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le c\|x\|$$

حيث $x = (\xi_i)$. هذا يعني إن T محدود ، وهنا $C=1$.

لنوجد $\|A\|$: $\|A(x)\|_{\ell_2} \le \|x\| \Rightarrow \sup_{\substack{x\in\ell_2 \\ x\ne\theta}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \le 1 \Rightarrow \|A\| \le 1 \qquad (1)$

من جهة أخرى لنأخذ $\sigma = (1,0,0,\ldots)$ من الفضاء ℓ_2 عندئذ $\|\sigma\| = 1$ كما أن : $\|A(\sigma)\| = 1$.

كما أن $\sup_{\substack{x\in\ell_2 \\ x\ne\theta}} \|A(x)\| \ge \sup_{\substack{\sigma\in\ell_2 \\ \|\sigma\|=1}} \|A(\sigma)\| = 1$ أي أن $\|A\| \ge 1 \qquad (2)$ من (1) و (2) نستنتج أن $\|A\| = 1$

Scanned by CamScanner

3 ن ان $y=(\eta_i)$ وأن $A^*(y)=(z_i)\quad ; i=1,2,3,\ldots$ وكما هو معلوم من أجل $x_1=(\xi_1,\xi_2,\ldots)$ و $x_2=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots)$ من الفضاء ℓ_2 فإن الجداء الداخلي في ℓ_2 يعطى بالعلاقة : $\langle x_1,x_2\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\zeta_i}$. بالتالي يكون : $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\xi_i}{i}\overline{\eta_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{z_i}$

بالمطابقة بين الطرفين نجد : $z_1=\frac{\eta_1}{1}, z_2=\frac{\eta_2}{2},\ldots, z_n=\frac{\eta_n}{n}$ بذلك فإن :

3 $A^*y=(\frac{\eta_1}{1},\frac{\eta_2}{2},\ldots,\frac{\eta_i}{i},\ldots)$. من هذا نستنتج أن $A^*=A$ أي أن المؤثر مترافق ذاتياً .

<u>جواب السؤال الخامس (١٥ درجة):</u> الفضاءالمرافق للفضاء ℓ_1:

3 لنأخذ (e_i) قاعدة شاودر للفضاء ℓ_1 عندئذٍ كل عنصر x من ℓ_1 يكتب بالشكل: $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$

ليكن f دالياً خطياً محدوداً. عندئذٍ: $\quad (1)\quad f(x)=f\left(\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f_i$

حيث $f_i=f(e_i)$ تتعرف بشكل وحيد بواسطة الدالي f. ولما كان $\|e_i\|=1$ فإن:

3 $|f_i|=|f(e_i)|\le\|f\|\,\|e_i\|=\|f\|$

أي: $\quad (2)\quad \sup_i|f_i|\le\|f\|$ فإن $(f_i)\in\ell_\infty$.

3 من جهة أخرى ومن أجل كل عنصر من ℓ_∞ وليكن $\zeta=(\zeta_i)$ يمكننا إيجاد دالي خطي محدود g على ℓ_1 بحيث يكون: $g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\zeta_i$ حيث $x=(\xi_i)\in\ell_1$. نلاحظ أن $g\in\ell_1^*$ لأن g خطي ومحدود وأن:

$$|g(x)|\le\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i.\zeta_i|\le\sup_i\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|=\|x\|\sup_i|\zeta_i|$$

من العلاقة (1) نجد: $|f(x)|\le\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i.f_i|\le\sup_i\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|=\|x\|\sup_i|f_i|$

3 بأخذ $\|x\|=1$ نجد: $\quad (3)\quad \|f\|\le\sup_i|f_i|$

من المتراجحتين (2) و (3) نستنتج: $\|f\|=\sup_i|f_i|$

وهذا يعني أن نظيم f ليس إلا النظيم على الفضاء ℓ_∞. وبالتالي نجد أن الفضاء المرافق ℓ_1 هو الفضاء ℓ_∞.

3 نعرّف الفضاء $b_a(\mathbb{N})$ بأنه مجموعة كل التوابع: $\mu:P(\mathbb{N})\longrightarrow\mathbb{R}$ المحدودة والجمعية المنتهية مع العمليات الخطية المعروفة. حيث $P(\mathbb{N})$ لمجموعة كل أجزاء مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$. الفضاء $b_a(\mathbb{N})$ هو الفضاء المرافق للفضاء ℓ_∞ أي $\ell_\infty^*=b_a(\mathbb{N})$ ، نستنتج أن الفضاء ℓ_∞ ليس انعكاسياً.

حمص في ٣١ / ١ / ٢٠١٦ م. انتهت الإجابات

مدرسا المقرر

د. سامح العرجة ، د. محمد عامر